



Becslési módszerek errors-in-variables környezetben

PhD értekezés tézisei

Hunyadi Levente

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Automatizálási és Alkalmazott Informatikai Tanszék

Témavezető:

Dr. Vajk István, MTA doktora
tanszékvezető egyetemi tanár
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Automatizálási és Alkalmazott Informatikai Tanszék

Budapest
2013

1. Bevezetés

A mérnöki gyakorlatban gyakran merül fel az a feladat, hogy egy nagyméretű adathalmazból számítógépes modellt hozzunk létre. Az olyan területeken, mint a számítógépes látás, a mintafelismerés, a képfeldolgozás, a beszéd- és hangfeldolgozás, a jelfeldolgozás, a modális és spektrális analízis, az adatbányászat, a rendszeridentifikáció, az ökonometria vagy az idősor-elemzés, a célunk sokszor az, hogy azonosítsuk vagy írjuk le azokat a belső törvényszerűségeket, amelyek egy rendszert vezérlik, ahelyett, hogy a rendszer jövőbeli viselkedését jeleznénk előre. Másiképpen fogalmazva, azt vizsgáljuk, a megfigyeléseket alapul véve a mért változók milyen összefüggésben vannak egymással. Amíg a rendelkezésünkre álló adatok mennyisége és dimenziószáma jelentős lehet, az adatpontok közötti összefüggést kifejező egyenlet többnyire tömör formában megfogalmazható. Egy rendszeridentifikációs környezetben például egy diszkrét idejű dinamikus rendszer paramétereit keressük a zajjal mért bemeneti és kimeneti adatsor ismeretében. Egy mintafelismerési környezetben ugyanakkor olyan egyszerű alakzatokat illesztünk az adatpontok rendszerezetlen halmazára, mint vonalak, ellipszisek, parabolák, stb. Amíg ezek a feladatok rendkívül különbözőnek tűnnek, van néhány közös tulajdonságuk, amelyek meghatározzák a *paraméteres errors-in-variables rendszerek* jellemzőit:

- A vizsgált rendszert jellemző összefüggések struktúráját alkotnak. Míg az összegyűjtött adatok mennyisége jelentős lehet, a paraméterek száma korlátos: a rendszer leírható viszonylag egyszerű összefüggések halmazával, amelyek a paramétereket leszámítva ismertek. Egy diszkrét idejű dinamikus rendszer leírható egy alacsony fokszámú polinommal, amely a kimeneti változót a bemeneti és kimeneti változók korábbi értékeivel hozza kapcsolatba, még akkor is, ha az adatsorok ezres nagyságrendű megfigyelésekből állnak. Egy gyártmányról lézerszkennel segítségével nyert pontok halmaza modellezhető akár néhány kvadratikus felülettel.
- Nincsenek kitüntetett változók. Az egyenletek, amelyek az adatpontok közötti összefüggést megfogalmazzák, implicit $f(\mathbf{x}) = 0$ alakúak, és nem explicit $y = f(\mathbf{x})$ alakúak. Egy háromdimenziós képen nincs speciális jelentősége az adatpontok x , y vagy z koordinátájának, és az adatokat forgatásnak vagy eltolásnak vehetjük alá.
- A mért adatok zajosak. A statisztikában megszokott feltételezéssel szemben a legtöbb esetben nem tehetünk érdemi különbséget (zajmentes) független és (zajos) függő változók között. Az errors-in-variables környezetben minden változót mért mennyiségnek tekintünk, amelyek zajosak. Egy dinamikus rendszer bemenetét és kimenetét is zajos mérések sorozatának tekintjük, és a szkennelről nyert pontok minden koordinátájának értékéhez zaj adódik hozzá.

A vizsgált rendszer mögötti összefüggés feltárása egy olyan tömör leírást ad, amely lényegesen egyszerűbben feldolgozható és jelentősen hozzájárulhat a rendszer működésének megértéséhez. Például egy olyan mintafelismerési algoritmus, amely kihasználja, hogy a gyártmányok megközelítőleg 85%-a kvadratikus felületekkel modellezhető [CJ93], és ennek fényében ilyen típusú felületeket illeszt, sokkal kevesebb paramétert használ, mint egy alapvetően nemparaméteres megközelítés, amely csak közelségi információt használ fel. Ezen felül a visszafejtett modell alkalmasabb későbbi transzformációkra, például konstruktív szilárdtest geometria (constructive solid geometry) műveletekre.

Amikor a feltárandó összefüggés lineáris, a matematikai és statisztikai eszköztár hagyományos elemei, mint a szingulárisérték-felbontás, alkalmazhatók statikus rendszerekre, és iteratív algoritmusokat alkothatunk dinamikus rendszerekre. A nemlinearitás ugyanakkor megnehezíti, hogy az eredeti (zajmentes) rendszerre következtessünk a (zajos) mért változók alapján, a hagyományos megközelítések jelentős torzításhoz vezethetnek, mivel additív zaj adódik hozzá a rendszer nemlineáris változóihoz. Az értekezés célja, hogy a lineáris errors-in-variables rendszerek eredményeit a nemlineáris eset egy olyan viszonylag gazdag halmazára kiterjessze, amelyben a rendszert polinomiális függvények modellezzik.

2. Célkitűzések és kutatási módszertan

Az értekezés a nemlineáris paraméteres errors-in-variables rendszerek témaköréhez tartozó, identifikációs és felismerési feladatokhoz kapcsolódó algoritmusokat mutat be. Az algoritmusok egy része statikus, más része dinamikus (időfüggő) rendszerekre vonatkozik. Az értekezésben hangsúlyos szerepet kapnak az alacsony fokszámú polinomiális függvények, a méréseket terhelő zajokról pedig feltételezzük, hogy Gauss eloszlás szerintiek. Míg egyes eredmények a teljesen paraméteres esetre vonatkoznak, amikor a rendszer struktúrája – az ismeretlen paramétereket leszámítva – ismert, addig az értekezés más eredményei azt a gépi tanulásból ismert megközelítést alkalmazzák, hogy a rendszer építőelemek halmazából áll össze, amelyek közül mindegyik ismeretlen paraméterekkel definiált, de jól ismert struktúrával ragadható meg.

Először a statikus rendszerek területét vizsgáljuk olyan esetben, amikor a becslési feladathoz korlátozások kapcsolódnak. Egy gépi látással kapcsolatos alkalmazásban például felmerülhet, hogy általános kvadratikus görbe helyett ellipszist illesszünk rendezetlen pontok halmazára. Több korábbi gépi látással foglalkozó munka megmutatta, hogyan lehet olyan korlátozásokat belefoglalni a becslési algoritmusokba, mint ellipszist illeszteni hiperbola helyett, de ezek a munkák többnyire nem vették megfelelően figyelembe a zaj által keltett nemlineáris torzítást. Az értekezésben bemutatott módszer egy lépéssel tovább visz, és a paraméterbecslési feladatba úgy foglalja bele a kényszereket, hogy kiejti a zaj torzító hatásait.

Másodikként egy gépi tanulásban közismert feladatot, nevezetesen a klaszterezést vesszük górcső alá, egy olyan esetben, amikor a rendszer eredetileg számos elemből épül fel, és ezen elemek mindegyikét egy polinomiális összefüggés, vagy kevésbé általánosan kvadratikus görbék és felületek írják le, de nekünk csupán zajos adatok rendezetlen halmaza áll rendelkezésünkre, és a célunk az, hogy feltárjuk a rendszer eredeti struktúráját, és becsljük az építőelemeket leíró paramétereket. Számos algoritmus ismert, amelyek képesek kezelni az ún. (több)alteres klaszterezési vagy hibrid lineáris modellezési feladatot, ahol a cél olyan csoportok összességéből álló modellt alkotni, ahol a csoportokba sorolt adatpontok között lineáris összefüggés van. Azonban nem minden adathalmaz bontható csoportokra lineáris összefüggések mentén, és lineáris módszereket alkalmazni alapvetően nemlineáris összefüggésekre elveszi ezen módszerek egyszerűségét és leíróerejét. Az alteres klaszterezés egy természetes általánosítása az értekezésben tárgyalt sokaságokon értelmezett klaszterezés, ahol mindegyik sokaságot valamilyen nemlineáris (vagy polinomiális) összefüggés kapcsol össze.

Végül a dinamikus rendszereket vizsgáljuk, ahol a diszkrét idejű rendszereket tekintjük, és az értekezés az általánosított Koopmans–Levin módszert (angol nevének kezdőbetűiből

GKL [Vaj05] és az eredeti Koopmans módszer nemlineáris kiterjesztését (NK) [VH03] ötvözi. A GKL módszer lineáris dinamikus rendszerek paraméterbecslésére szolgál, a pontosság és a számítási költség közötti tetszőleges skálázással, míg az NK módszer egy nemiteratív megközelítést ad polinomiális függvénnyel leírható statikus rendszer paraméterbecslésére. A két módszer ötvözésével az értekezés új algoritmust mutat be olyan dinamikus rendszerek paraméterbecslésére, amelyeknek Gauss zajjal megfigyelt változói között polinomiális függvény teremt kapcsolatot.

3. Eredmények

A felvázolt célkitűzésekkel összhangban az eredményeket három tézisre bontottam. Az első tézis a statikus rendszereket vizsgálja, és $f(\mathbf{x}) = 0$ halmazok paraméterbecslésére ad módszert korlátozások nélkül és kiegészítő korlátozásokkal. Az első tézis alapfeltevése, hogy a teljes adathalmaz egyetlen ismert struktúrájú polinomiális összefüggésből származik (azaz egy csoportot alkot), bár a paraméterek nem ismertek. A második tézis az elsőre épít, és az illesztési problémát több csoportra terjeszti ki, ahol a cél nemcsak a paraméterek becslése az egyes csoportokon belül, hanem az egyes csoportok meghatározása is. Végül a harmadik tézis az első tézis eredményeit felhasználva a statikus rendszerekre szabott becslési módszereket általánosítja dinamikus rendszerekre.

A bemutatott módszerek statisztikai megközelítést alkalmaznak és a paramétereket a mintaadatok kovarianciamátrixa alapján határozzák meg. Numerikus szempontból általánosított sajátérték feladaton alapulnak, amely lehetővé teszi mai hardveren történő kézenfekvő megvalósításukat.

3.1. Függvényillesztés korlátozásokkal zajkioltás segítségével

A tézishez kapcsolódó közlemények: [8, 10, 11]

A számítógépes látás, mintafelismerés és képfeldolgozási alkalmazások egyik gyakori feladata kvadratikus görbék és felületek, különösképpen ellipszisek és ellipszoidok illesztése. Egy adott

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$$

paraméteres függvény mellett, ahol P jelöli a kvadratikus függvényt (ponthalmazt), \mathbf{x} jelöli a pontok koordinátavektorát (ami a szabad paraméter) és \mathbf{g} jelöli a görbe vagy felület paramétereit, a célunk az, hogy becsüljük \mathbf{g} értékét zajos $\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i + \tilde{\mathbf{x}}_i$ mintákból, ahol $\bar{\mathbf{x}}_i$ a zajmentes adatot, $\tilde{\mathbf{x}}_i$ pedig a hozzáadott zajt jelöli, úgy hogy

$$P(\bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{g}) = 0$$

legyen. Egy lehetséges módja \mathbf{x}_i adatpontokból \mathbf{g} becslésének, ha a mértani távolságot használjuk [CM11], azaz maximum likelihood becslést végzünk, és minimalizáljuk az

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2$$

hibafüggvényt, ahol d_i a zajos \mathbf{x}_i adatpontok távolságát méri a $P(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$ görbétől vagy felülettől. Bár pontos, ez a módszer (és közelítései [MM00, C⁺05]) iteratív módszerekre vezet, amelyek lassan konvergálhatnak (vagy esetenként divergálhatnak), és megfelelő kezdeti érték szükséges hozzájuk. Egy robusztusabb módszer, ha az algebrai távolságot használjuk, és minimalizáljuk a

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P(\mathbf{x}_i, \mathbf{g}))^2$$

hibafüggvényt, amelyben a görbe vagy felület egyenletébe a zajos pontokat helyettesítettük, és az algebrai illesztés a helyettesítési hibát minimalizálja, ami egy gyors, nemiteratív módszerhez vezet. Legyen a kétdimenziós mérések egy linearizációja

$$\mathbf{z}^\top = [x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x \quad y \quad 1] \quad (1)$$

és a háromdimenziós mérések egy linearizációja

$$\mathbf{z}^\top = [x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad xz \quad yz \quad x \quad y \quad z \quad 1] \quad (2)$$

úgy, hogy a minták kovarianciamátrixa

$$\mathbf{D} = \frac{1}{N} \sum_i \left(\mathbf{z}_i - \frac{1}{N} \sum_j \mathbf{z}_j \right) \left(\mathbf{z}_i - \frac{1}{N} \sum_j \mathbf{z}_j \right)^\top.$$

A legkisebb négyzetek módszerén alapuló megoldás a

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = \lambda \mathbf{g}$$

sajátérték feladatot oldja meg a legkisebb λ sajátértékre.

Ugyanakkor számos esetben korlátozások mellett szeretnénk kvadratikus görbéket és felületeket illeszteni, azaz a \mathbf{g} paramétervektort úgy szeretnénk becsülni, hogy kvadratikus görbék vagy felületek adott osztályába essen, pl. ellipszis vagy ellipszoid legyen. A közvetlen legkisebb négyzetes ellipsziszillesztés [FPF99, HF98] egy olyan

$$\mathbf{Q} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{0}_{3 \times 3} \right)$$

korlátozást (normalizációs mátrixot) használ, ami a

$$\mathbf{g}^\top \mathbf{Q} \mathbf{g} > 0$$

kényszernek felel meg, és a

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = \lambda \mathbf{Q}\mathbf{g}$$

sajátérték feladatot oldja meg az egyetlen pozitív λ sajátértékre.

Sajnos bármilyen egyszerű, közvetlenül az algebrai hiba minimalizálása statisztikai szempontból pontatlan. Egy másik megközelítés, amely megtartja a legkisebb négyzetes módszer egyszerűségét, de jelentősen csökkenti pontatlanságukat, ha egy hibakiejtési sémát használunk, és a legkisebb négyzetes illesztés előtt minél inkább ellensúlyozzuk a zaj torzító hatásait. Ahogyan az az (1) és a (2) megfigyelési vektorokból látható, a zaj hatása az egyes komponenseken (pl. x^2) nemlineáris lehet, amit számításba kell venni az ilyen becslési módszerek megalkotásakor. Mindez egy

$$\mathbf{D} - \mathbf{C}(\mu)$$

mátrixpolinomra vezet, ahol μ jelöli a zaj nagyságát és $\mathbf{C}(\mu)$ egy zajos megfigyelésekből becsült mátrix. Ezután a zajkioltott $\mathbf{D} - \mathbf{C}(\mu)$ mátrixot korlátozások melletti minimalizálásnak vetjük alá, ahol a kvadratikus görbe vagy felület osztályát (pl. ellipszis vagy ellipszoid) figyelembe vesszük.

A javasolt becslési módszer tehát a következő lépésekből áll:

1. zajkioltás
2. korlátozások melletti kvadratikus legkisebb négyzetes illesztés

A megközelítés garantálja egyrészt a konzisztens becslést (1-es lépés) másrészt a robusztusságot (2-es lépés); az algoritmus, más algoritmusokkal ellentétben, akkor is a korlátozásoknak megfelelő eredményt ad, ha az adatok az illesztendő től eltérő alakzatot sugallnának.

1. tézis: Ellipszis, parabola, hiperbola és ellipszoid illesztése zajkioltás segítségével

Errors-in-variables paraméterbecslési módszert adtam másodfokú görbék és felületek korlátozások melletti illesztésére. A módszer egy zajkioltási lépéssel egészít ki korlátozások melletti kvadratikus legkisebb négyzetes illesztési algoritmusokat. A zajkioltási lépés kvadratikus sajátérték feladatként írható szimmetrikus mátrix együtthatókkal, ahol a sajátérték feladat egy olyan kovarianciamátrixra vezet, amelyben már figyelembe vesszük a zajok torzító hatásait. A zajkioltási lépés felírható a kovarianciamátrix statisztikailag invariáns elemei nélkül, ami egyszerűbb kifejezéshez vezet. Az adatok zajjal korrigált kovarianciamátrixán végrehajtva a közvetlen legkisebb négyzetes ellipszis-, parabola-, hiperbola- és ellipszoidillesztés közül mind egyik algoritmus magasabb illesztési pontosságot ér el a zajkioltás nélküli eredeti megfogalmazásával összehasonlítva.

A \mathbf{z}_i adatpontok halmaza és ezen minták \mathbf{D} kovarianciamátrixa alapján a zajok egy becsült $\mathbf{C}(\mu)$ kovarianciamátrixa megadható egyszerű lépések sorozatának alkalmazásával. A kvadratikus görbék és felületek paraméterbecslésének konkrét esetére vonatkoztatva $\mathbf{C}(\mu)$ a $\mathbf{C}(\mu) = \mu^2 \mathbf{C}_2 + \mu \mathbf{C}_1$ alakot ölti, ahol \mathbf{C}_2 a kvadratikus résznek megfelelő mátrix, amelynek elemei σ_x^2 és σ_y^2 (illetve három dimenzióban σ_z^2) varianciától függenek, míg \mathbf{C}_1 a lineáris résznek felel meg, és elemei a már említett varianciák mellett véges számú zajos mintából közelített tagoktól függenek, utóbbi kétdimenziós esetben $\mathbb{E}(x^2)$, $\mathbb{E}(y^2)$, $\mathbb{E}(xy)$, $\mathbb{E}(x)$ és $\mathbb{E}(y)$ várható értékek közelítését jelenti. Mivel pusztán a zaj nagyságának ismerete nem ad önmagában hasznos információ, a zajt $\sigma_x^2 = \mu \bar{\sigma}_x^2$, $\sigma_y^2 = \mu \bar{\sigma}_y^2$ alakban írjuk úgy, hogy $\bar{\sigma}_x^2 + \bar{\sigma}_y^2 = 1$, ahol $\bar{\sigma}_x^2$ és $\bar{\sigma}_y^2$ a zaj

(ismert) „irányát” (változók közötti relatív eloszlását) jelentik, míg μ jelöli a zaj (ismeretlen) nagyságát. Így a

$$\Psi(\mu)\mathbf{g} = (\mathbf{D} - \mu\mathbf{C}_1 - \mu^2\mathbf{C}_2)\mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

kvadratikus sajátérték feladatra jutunk.

A kvadratikus sajátérték feladat egy lehetséges megoldása linearizációval történhet, amelynek során a μ változótól való polinomiális függést az együttthatómátrixok méretének növelése árán küszöböljük ki, amely analóg a polinomok gyökeinek keresésekor használt hasonló eljárással. Azok az átalakítások, amelyek megőrzik a szimmetriát különösen hasznosak numerikus tulajdonságaik miatt. Egy ismert eredmény [TM01]

$$\mathbf{D} - \mu\mathbf{C}_1 - \mu^2\mathbf{C}_2$$

kvadratikus sajátérték feladat linearizálására a szimmetrikus

$$\Xi(\lambda) = \Xi_1 - \lambda\Xi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

alak, ami szimmetrikus általánosított sajátérték feladatra vezet.

A következő algoritmus összefoglalja az általános kvadratikus görbékre és felületekre alkalmazott zajkioltási sémát:

Zajkioltási séma kvadratikus görbékre és felületekre.

1. *Bemenet:* zajos \mathbf{x}_i minták és a zaj relatív nagysága minden komponensre egy $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ varianciavektor formájában.
2. Becsüljük az adatok \mathbf{D} kovarianciamátrixát zajos mintákból.
3. Becsüljük a zaj kovarianciamátrix-polinomjának \mathbf{C}_1 és \mathbf{C}_2 együttthatóit a zajos minták alapján.
4. Keressük meg azt a μ sajátértéket, amely megoldja a $\det(\mathbf{D} - \mu\mathbf{C}_1 - \mu^2\mathbf{C}_2) = 0$ feladatot.
5. *Kimenet:* a zajkioltott (szinguláris) $\mathbf{R} = \mathbf{D} - \mu\mathbf{C}_1 - \mu^2\mathbf{C}_2$ mátrix.

Miután a zaj hatásait figyelembe vettük, a korlátozások melletti paraméterbecslési optimalizálási feladatot

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{g}} & \mathbf{g}^\top \mathbf{R} \mathbf{g} \\ \text{s.t.} & \mathbf{g}^\top \mathbf{Q} \mathbf{g} = 1 \end{array}$$

alakban írhatjuk, amely

$$\mathbf{R} \mathbf{g} = \lambda \mathbf{Q} \mathbf{g}$$

általánosított sajátérték feladatra vezet. A \mathbf{Q} a korlátozásokat jelöli. Bontsuk fel a vektorokat és a mátrixokat úgy, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^\top &= \left[\mathbf{g}_1^\top \quad \mathbf{g}_2^\top \right]^\top \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_2^\top & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ahol \mathbf{Q}_1 jelöli azt a kvadratikus korlátozást, amely a paramétereket pl. egy ellipszis vagy hiperbola paramétereinek köti meg úgy, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_2^\top & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}.$$

Az ismert [HF98, HOZM08]

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -\mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^\top \\ \mathbf{S} &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \mathbf{T}\end{aligned}$$

felírást követve, ahol az inverz \mathbf{R}_3^{-1} mindig létezik, kivéve, ha a pontok egy egyenest vagy egy síkot alkotnak. Így

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{T} \mathbf{g}_1 \end{bmatrix},$$

ahol a becslési feladatot a csökkentett méretű \mathbf{S} mátrix \mathbf{g}_1 sajátvektorának keresésével oldjuk meg, hogy kielégítse a $\mathbf{g}_1^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{g}_1 = 1$ korlátozást, azaz

$$\mathbf{S} \mathbf{g}_1 = \lambda \mathbf{Q}_1 \mathbf{g}_1. \quad (3)$$

Ellipszis és hiperbola illesztéséhez vegyük a

$$q = \mathbf{g}_1^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{g}_1 \quad (4)$$

korlátozást, ahol $q > 0$ ellipszis illesztéséhez és $q < 0$ hiperbola illesztéséhez. Ellipszisillesztéshez [FPF99] a megoldást jelentő \mathbf{g}_1 vektor ideális esetben (ha nincsenek numerikus hibák) a (3) sajátérték feladat legkisebb pozitív λ sajátértékének felel meg, míg hiperbolaillesztéshez [OZM04] a sajátvektorok közül legjobb \mathbf{g}_1 vektor a (4) összefüggésbe való visszahelyettesítéssel található meg. A (3) általánosított sajátérték feladatnak tehát három megoldása van a korlátozások tekintetében: a küpszelet-illesztési feladat egy elliptikus és két hiperbolikus megoldása, a λ sajátértéktől függően. Az egyik hiperbolikus megoldás és az elliptikus megoldás között szimmetria van, ami lehetővé teszi, hogy egyértelműen azonosítsuk a megfelelő két megoldást [OZM04].

A parabolaillesztés nem tudja közvetlenül kihasználni az ellipszis és hiperbola illesztéséhez használt korlátozásokat, mivel $q = 0$ korlátozásra vezetne, ami viszont a triviális megoldást adná. Ehelyett, [HOZM08] eljárást követve,

$$\mathbf{S}\mathbf{g}_1 = \lambda \mathbf{g}_1$$

hagyományos sajátvektor felbontását számítjuk ki, amely a $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ implicit kényszert tartalmazza, ami a becslést egy meghatározatlan ámdé kvadratikus görbére korlátozza, és a parabolára vonatkozó korlátozást explicite és nem a sajátérték feladaton keresztül mondjuk ki. \mathbf{S} sajátvektor-felbontása mellett a keresett megoldás a sajátértékek egy

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3$$

lineáris kombinációjaként írható, ahol s és t skalár mennyiségek és olyan \mathbf{g}_1 minimális normájú vektort keresünk, amelyre

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathbf{g}_1^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{S} \mathbf{g}_1 \\ &= (\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3)^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{S} (\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3) \\ &= \mathbf{v}_1^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{S} \mathbf{v}_1 + s^2 \mathbf{v}_2^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{S} \mathbf{v}_2 + t^2 \mathbf{v}_3^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{S} \mathbf{v}_3 \\ &= \lambda_1^2 + s^2 \lambda_2^2 + t^2 \lambda_3^2, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk a sajátérték ortogonalitási tulajdonságát, azaz $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = 0$ minden $i \neq j$ -re. Így a parabola korlátozás kifejezhető a sajátvektorokkal

$$\mathcal{C} = (v_{1,2} + sv_{2,2} + tv_{3,2})^2 - 4(v_{1,1} + sv_{2,1} + tv_{3,1})(v_{1,3} + sv_{2,3} + tv_{3,3}) = 0$$

alakban, ahol $v_{i,j}$ az i . sajátvektor j . eleme. Ez a

$$\mathcal{L}(s, t, \alpha) = \mathcal{F}(s, t) + \alpha \mathcal{C}(s, t)$$

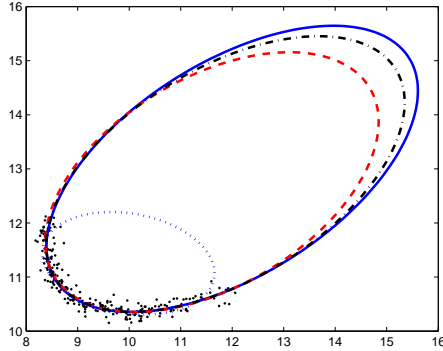
Lagrange összefüggéshez vezet, ami egy negyedrendű polinom α -ban, miután a paraméterekhez tartozó deriváltakat nullával tettük egyenlővé. A polinomot α értékére megoldva és visszahelyettesítve megkapjuk s és t értékét, amivel végül megkapjuk a \mathbf{g}_1 , és ezáltal a \mathbf{g} paramétervektort.

Ellipszoid illesztéséhez [LG04] a (3) korlátozást

$$\mathbf{Q}_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix}, -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \right)$$

mátrixnak választjuk, ahol $k \geq 4$. Az ellipszisekhez és hiperbolákhoz kapcsolódó korlátozással szemben, amelyek egyszerű korlátozást fejeznek ki, az ellipszoidra vonatkozó korlátozás függ a k paramétertől. Legyen

$$\mathbf{g}^\top = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5 \quad g_6 \quad g_7 \quad g_8 \quad g_9 \quad g_{10}]$$



1. ábra. A közvetlen ellipszisillesztés (pontosított vonal), a hiperpontos ellipszisillesztés (szaggatott vonal) és a zajkioltást használó becslési módszer (pontosított-szaggatott vonal) pontosságának összehasonlítása. Mind a hiperpontos ellipszisillesztés, mind a zajkioltáson alapuló módszer a becsléshez használt, zajosan mért pontokat (az ábrán fekete pontok) adó eredeti görbéhez (folytonos vonal) hasonlóan közeli eredményt ad, míg a közvetlen ellipszisillesztés jelentős kis excentricitási torzítással bír.

amely párosítható

$$\mathbf{z}^\top = \left[\begin{array}{cccccccccc} x^2 & y^2 & z^2 & xy & xz & yz & x & y & z & 1 \end{array} \right]$$

komponenseivel, és legyen

$$\begin{aligned} I &= g_1 + g_2 + g_3 \\ J &= g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_1 g_3 - \frac{1}{4} g_4^2 - \frac{1}{4} g_5^2 - \frac{1}{4} g_6^2. \end{aligned}$$

Amikor $4J - I^2 > 0$, a \mathbf{g} paramétervektor ellipszoidnak felel meg. Másrésztől ha az ellipszoid rövid sugara legalább a hosszú sugár fele, teljesül $4J - I^2 > 0$ (ami $k = 4$ értéknek felel meg). Minden ellipszoidra létezik olyan k , amelyre $kJ - I^2 > 0$. Megmutatható [LG04], hogy amikor rövid sugár legalább a hosszú sugár $1/\sqrt{k}$ -szerese, teljesül $kJ - I^2 > 0$. Egy felezéses módszerrel nagy k értékről indulva, a \mathbf{g}_1 paramétereket $\mathbf{Q}_1(k)$ mellett becslülve, és addig iterálva, amíg \mathbf{g}_1 ellipszoidnak felel meg, garantálhatjuk, hogy ellipszoidot illesztünk.

Az 1. ábra három becslési módszert hasonlít össze: egy legkisebb négyzetek módszerére alapuló közvetlen ellipszisillesztést [FPF99] (pontosított vonal), a hiperpontos ellipszisillesztést [KR11] (szaggatott vonal) és a zajkioltási megközelítésen alapuló becslést (pontosított-szaggatott vonal). 250 eredeti adatpontot mintavételeztünk egyenletesen az ellipszis egy szakasza mentén (folytonos vonal), amelyeket $\sigma_{\mathbf{x}} = 0.1$ paraméterű Gauss zajjal figyelünk meg (a mért pontokat fekete pontok jelzik). Az eredeti ellipszis, amelyről az adatpontok származnak, középpontja (12, 13), féltengelyeinek hossza 4 és 2, és dőlésszöge $\frac{\pi}{6}$. Megfigyelhető, hogy az

általunk használt becslés hasonló pontosságot ér el, mint a hiperpontos ellipszisillesztés (egy egyenlethiba módszer, amely teljesen kiejti a másodrendű hibatagokat), míg lényegesen felülmúlja a közvetlen ellipszisillesztést, aminek jelentős torzítása van a kis excentricitás felé. A bemutatott módszertől eltérően a hiperpontos ellipszisillesztés számos mátrix pszeudoinvertének kiszámítását igényli, és nevével eltérően nem ad minden esetben ellipszist.

3.2. Modellezés alacsony fokszámú polinomiális felületek illesztésével

A tézishez kapcsolódó közlemények: [1, 2, 6, 7, 12, 13, 14]

Ahogy számos forrásból és modalitásból egyre több adat áll rendelkezésre, úgy egyre nagyobb az igény arra, hogy nagy mennyiségű adathalmazokat rögzítsünk, tömörítsünk, tároljunk, továbbítsunk és dolgozzunk fel. A legtöbb eredmény azon a megfigyelésen alapul, hogy amíg az adatok gyakran magas dimenziószámúak, a belső dimenziószámuk (sokkal) alacsonyabb. Például egy háromdimenziós adathalmaz esetén vonalakat, síkokat és ellipszoidokat kereshetünk az adathalmazban. A hagyományos technikák, mint a szingulárisérték-felbontás, egy magas dimenziószámú tér alacsony dimenziószámú leírását, egy tömör modellt keresnek, amely az adatpontokat bázisvektorok korlátozott halmazával fejezi ki, feltételezve, hogy az adatpontok egyetlen alacsony dimenziószámú térből származnak. A legtöbb esetben azonban az adatpontok ritkán alkotnak egyetlen alacsony dimenziószámú teret. Ehelyett számos altérhez tartoznak, és a modellezésnek része mind az alterek közötti tagság azonosítása, mind az alterekben történő illesztés. Az altér-alapú klaszterezés, ahogyan a feladatra gyakran hivatkoznak, egy lényegesen nehezebb feladat, egy sor kihívással:

1. Az adatszegmentáció és a modellparaméter-becslés szorosan összefüggnek. Akár a helyes szegmentációt, akár a paraméterek értékét ismernénk, a másik könnyen származtatható lenne hagyományos becslési vagy vetítési módszereket alkalmazva. Az együttes szegmentáció és becslés azonban nagyobb kihívást támaszt.
2. Az adatpontok egyetlen eloszlása és az alterek egymáshoz viszonyított elhelyezkedése, beleértve az alterek metszeteit, összetettebb algoritmusokat kíván.
3. A modellkiválasztás, azaz minden egyes altér esetén a megfelelő dimenziószám kiválasztása nehéz lehet, ha az alterek komplex struktúrába rendeződnek.
4. Az adatpontokban megjelenő zaj több bizonytalanságot visz a modell pontosságába az egy alteres esettel összehasonlítva.

Egy kézenfekvő módja az alterek feltérképezésének iteratív finomítást alkalmazni. Egy kezdeti szegmentációból kiindulva egy altér illeszhető adatpontok minden egyes csoportjára olyan klasszikus módszerek segítségével, mint a szingulárisérték-felbontás, majd egy minden egyes altérre vonatkozó modell birtokában minden adatpont a legközelebbi altérhez rendelhető. Ezt a két lépést a konvergencia eléréséig felváltva alkalmazva alterek egy becslése és szegmentációja adható.

Egyszerűségük ellenére az iteratív algoritmusok érzékenyek a kezdeti érték megválasztására. Ha az adatpontokat véletlenszerűen rendeljük csoportokba, akkor számos újraindítás

lehet szükséges, mielőtt egy optimum-közeli megoldást találunk. Csökkentendő az újraindítások számát, olyan algoritmusok szükségesek, amelyek kezdeti bemenet nélkül is megbízható eredményt szolgáltatnak. A spektrális lokálisan legjobban illeszkedő síkok módszere (angol nevének rövidítéséből SLBF) [ZSWL10] azon a megfigyelésen alapszik, hogy a pontok és legközelebbi szomszédai gyakran azonos altérbe tartoznak, amely becslést adhat az altér paramétereire. Egy pont, illetve egy másik pont környezetéből becsült altér közötti távolság hasonlósági mértékként szolgálhat két adatpont között. Az SLBF módszer elveit a nemlineáris esetre kiterjesztve, és alterek helyett az adatpontokra polinomiális függvényekkel leírható sokaságokat illesztve, majd megfelelő vetítéseket alkalmazva egy hatásos sokaságokon értelmezett klaszterezési algoritmushoz jutunk.

2.1. tézis: Iteratív algoritmus sokaságon értelmezett klaszterezésre

Új csoportosítási algoritmust adtam, amely adathalmazokban másodfokú görbéket és felületeket illeszt, ezzel általánosítva a lineáris mintákat megtaláló [BM00, Tse00, AM04, AWZZ06] lineáris csoportosítási algoritmusokat. Egy frissítési (paraméterbecslési) és egy hozzárendelési (adatleképezési) lépést váltakoztatva a módszer az adat egy strukturális dekompozícióját adja, ahol az egyes csoportok tagjai között egy alacsony fokszámú (lineáris vagy másodfokú) implicit polinomiális függvény teremt kapcsolatot.

Az új iteratív csoportosítási algoritmus váza hasonlít a k-közép eljárás hagyományos iteratív algoritmusára. A legfőbb különbség a középpontok helyett paraméterek, illetve az egyszerű (a klaszterközéppont és az adatpontok közötti) pont–pont távolság helyett adatpont–vetítés használatában rejlik. Ahogyan a hagyományos k-közép algoritmus esetén, a csoportok kezdeti megválasztása befolyásolja az optimális megoldáshoz való konvergenciát.

Polinomiális függvényeket illesztő iteratív csoportosítási algoritmus.

1. Kezdőállapot. Válasszunk k véletlenszerű \mathbf{x}_i kezdeti pontot, ahol $i = 1, \dots, k$, majd minden egyes \mathbf{x}_i pontra
 - (a) induljunk ki egy kezdeti, \mathbf{x}_i körüli $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezetből
 - (b) becsüljük a $\boldsymbol{\theta}_{i,(0)}$ paramétereket, amelyek a legjobban megragadják a pontokat $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezetben
 - (c) növeljük $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ méretét további legközelebbi szomszédok hozzáadásával
 - (d) számítsuk ki az új $\boldsymbol{\theta}_{i,(n)}$ becslést, és hasonlítsuk össze az előző iterációban kapott $\boldsymbol{\theta}_{i,(n-1)}$ becsléssel
 - (e) ismételjük a lépéseket, amíg $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezet nem növelhető $\boldsymbol{\theta}_{i,(n)}$ pontosságának rovására
 - (f) legyen $\boldsymbol{\theta}_i$ a legjobb $\boldsymbol{\theta}_{i,(n)}$ ami az optimális \mathbf{x}_i körüli $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezethez tartozik.

2. Kezdeti csoportosítás.

- (a) vetítsünk minden egyes \mathbf{x}_j adatpontot, ahol $j = 1, \dots, N$ minden lehetséges θ_i felületre, ahol $i = 1, \dots, k$
- (b) alakítsunk ki kezdeti \mathcal{S}_i csoportokat, ahol $i = 1, \dots, k$ úgy, hogy minimalizáljuk a távolságot.

3. Váltakozó optimalizálás.

- (a) Frissítési lépés. Minden egyes \mathcal{S}_i adatpont-csoport alapján új θ_i felületparamétereket becsülünk.
 - (b) Hozzárendelési lépés. Minden egyes \mathbf{x}_j adatpontot ahhoz a θ_i felülethez rendeljük, amelynek közelében található.
4. Véglegesítés. Minden egyes adatpontot ahhoz az egyetlen θ_i felülethez rendeljük, amelyhez legközelebb található.
 5. Újramintavételezés. Ismételjük meg az algoritmust különböző véletlenszerűen választott kezdeti pontokkal.

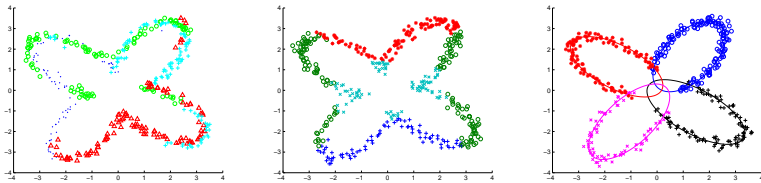
2.2. tézis: Nemiteratív algoritmus sokaságon értelmezett klaszterezésre

Polinomiális függvényeket illesztő klaszterezési módszert adtam az adathalmaz adatpontok előzetes hozzárendelése nélküli szegmentálására. A klaszterezési feladatot egy teljes irányított súlyozott gráffal modelleztem, ahol a csúcspontok az adatpontoknak, az a_{ij} élsúlyok pedig egy affinitási mértéknek felelnek meg, ahol az affinitás az i adatpontnak a j adatpont környezetéből becsült görbétől vagy felülettől való távolságát tükrözi. Egy legjobb súlyozott vágás algoritmust alkalmaztam a gráf k komponensre történő szétválasztására, ezáltal az adathalmaz egy aszimmetrikus spektrális klaszterezését adva, az adott távolságmérték mellett. A javasolt módszer felülmúlja más sokaságokon értelmezett olyan klaszterezési módszerek illesztési hatékonyságát, amelyek a klaszterezési folyamat során függvényillesztést közvetlenül nem alkalmaznak.

A spektrális klaszterezés segítségével történő csoportosítás orvosolja a helytelenül választott kezdeti pontok problémáját. A spektrális klaszterezés szükségtelemmé teszi az újramintavételezési lépést, és egy olyan klaszterezést ad, amely már önmagában közel van egy optimális megoldáshoz.

Polinomiális függvényeket illesztő csoportosítási algoritmus spektrális klaszterezéssel

1. Inicializálás. Minden egyes \mathbf{x}_i adatpontra, ahol $i = 1, \dots, N$
 - (a) induljunk ki egy kezdeti, \mathbf{x}_i körüli $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezetből



2. ábra. Sokaságokon értelmezett klaszterezési algoritmusok összehasonlítása; balra: K-sokaság algoritmus, középen: KSCC, jobbra: a javasolt algoritmus.

- (b) becsüljük a $\theta_{i,(0)}$ paramétereket, amelyek a legjobban megragadják a pontokat $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezetben
 - (c) növeljük $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ méretét további legközelebbi szomszédok hozzáadásával
 - (d) számítsuk ki az új $\theta_{i,(n)}$ becslést, és hasonlítsuk össze az előző iterációban kapott $\theta_{i,(n-1)}$ becsléssel
 - (e) ismételjük a lépéseket, amíg $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezet nem növelhető $\theta_{i,(n)}$ pontosságának rovására
 - (f) legyen θ_i a legjobb $\theta_{i,(n)}$ ami az optimális \mathbf{x}_i körüli $\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)$ környezethez tartozik.
2. Számítsuk ki az aszimmetrikus távolságot. Minden egyes $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ adatpontpárra határozzuk meg aszimmetrikus távolságukat a következőképpen:
- (a) vetítsük \mathbf{x}_i pontot a $\theta_{\mathcal{N}(\mathbf{x}_j)}$ felületre és határozzuk meg a_{ij} távolságot
 - (b) vetítsük \mathbf{x}_j pontot a $\theta_{\mathcal{N}(\mathbf{x}_i)}$ felületre és határozzuk meg a_{ji} távolságot.
3. Spektrális klaszterezés.
- (a) építsünk az a_{ij} távolságokból egy affinitási mátrixot
 - (b) rendeljük az adatpontokat csoportokhoz az affinitási mátrix sajátértékei alapján.

A 2. ábra a bemutatott algoritmus hatékonyságát mutatja, összehasonlítva más sokaságokon értelmezett olyan klaszterezési algoritmusokkal, amelyek lokalitási vagy összefüggési információt használnak. A bemutatott algoritmus jelentősen felülmúlja a K-sokaság algoritmust [SP05] és a KSCC algoritmust [CAL09], mivel strukturális információt használ és paraméteres görbéket és felületeket illeszt, ami jelentősen növeli magyarázóerejét, és így illesztési képességét.

A nemiteratív algoritmus alapötlete, hogy egy aszimmetrikus \mathbf{A} távolságmátrixot épít fel, aminek a_{ij} eleme az \mathbf{x}_i adatpont és annak $\theta_{\mathcal{N}(\mathbf{x}_j)}$ felületre vetítésével számított pont távolságának felel meg, ahol $\theta_{\mathcal{N}(\mathbf{x}_j)}$ felület paramétereit \mathbf{x}_j adatpont környezetéből becsüljük.

Legyen

$$a_{ij} = d(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{N}(\mathbf{x}_j)}, \mathbf{x}_j))$$

ahol d az Euklédieszi távolságot jelöli és $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i)$ jelöli az \mathbf{x}_i képét a $\boldsymbol{\theta}$ paraméterekkel meghatározott görbére vagy felületre vetítve, ahol $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{N}(\mathbf{x}_j)}$ azon görbe vagy felület paramétereit jelenti, amelyeket \mathbf{x}_j adatpont $\mathcal{N}(\mathbf{x}_j)$ lokális környezetében lévő adatpontok halmazából becsültünk. A távolság hagyományos fogalmával szemben itt általánosságban nem teljesül, hogy $a_{ij} \neq a_{ji}$. Az aszimmetrikus távolságmátrix

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]$$

szerint definiálható.

Egy nemiteratív megközelítés egy adathalmaz k csoportra történő szétbontására a spektrális klaszterezés. A legelső spektrális klaszterezési módszer ugyanakkor szimmetrikus távolságmátrixot feltételez. Amíg a hagyományos k -közép algoritmus pont-pont távolságot használ, ami eredendően szimmetrikus, a bemutatott polinomiális csoportosítási algoritmus felületekre történő vetítéseket alkalmaz, amely tipikusan nem szimmetrikus. Az aszimmetrikus spektrális klaszterezés, ami egy legjobb vágást keres egy súlyozott gráfban [MP07], a szimmetria túl korai kikényszerítése nélkül ad dekompozíciót.

Aszimmetrikus spektrális klaszterezés. Legyen \mathbf{S} egy (aszimmetrikus) mátrix olyan s_{ij} elemekkel inicializálva, amelyek 0 és 1 közötti értéket vesznek fel, az egyáltalán nem hasonló és leginkább hasonló szélsőségeknél megfeleltetve. Az algoritmus [MP07] lépései a következők:

1. Normalizáljuk az \mathbf{S} mátrixot. Legyen

$$d_i = \sqrt{\frac{1}{\sum_j |\mathbf{S}|_{ij}}}$$

ahol $\mathbf{D} = \text{diag}(d_i)$ úgy, hogy

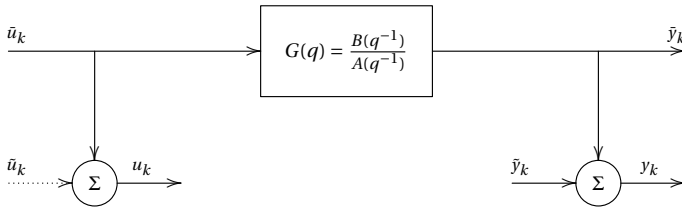
$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^\top) \mathbf{D}.$$

2. Határozzuk meg a $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\top$ mátrix legkisebb sajátvektorait, ahol \mathbf{U} a sajátvektorok mátrixa, \mathbf{A} pedig a sajátértékek diagonális mátrixa.
3. Rendezzük a k legkisebb $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ sajátvektort egy \mathbf{U}_k mátrixba.
4. Normalizáljuk \mathbf{U}_k sorait egységnyi hosszúságúra.
5. Végezzünk k -közép klaszterezést a normalizált \mathbf{U}_k mátrixon.

Az algoritmus lehetővé teszi, hogy egy olyan aszimmetrikus távolságmátrixszal induljunk, mint

$$\mathbf{S} = \exp(-\mathbf{A})$$

ahol az $\exp(\bullet)$ operátor mátrixelemenként értendő.



3. ábra. Egy diszkrét idejű lineáris dinamikus errors-in-variables rendszer.

3.3. Az általánosított Koopmans–Levin módszer nemlineáris esetre

A tézishez kapcsolódó közlemények: [9, 15, 3, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 28]

Az egybemenetű–egykimenetű (SISO) diszkrétidejű (DT) dinamikus lineáris rendszerek a rendszeridentifikáció és az irányítástechnika magját képezik. A 3. ábra azt mutatja, miben különbözik egy errors-in-variables rendszer a hagyományos rendszeridentifikációs modelltől. A klasszikus esetben csak a rendszer kimenetét mérjük zajjal, a rendszer bemenete zajmentesen figyelhető meg (azaz nincs a szaggatott vonalnak megfelelő zajterhelés), ami egy jól megértett feladat. A helyzet azonban kifinomultabb, amikor a rendszer bemenetét és kimenetét is zaj terheli. Amíg számos kutatás foglalkozott a dinamikus lineáris errors-in-variables rendszerek identifikációjával, a nemlineáris rendszerek kisebb hangsúlyt kaptak. Az értekezés egy olyan új módszert mutat be, amely kiterjeszti a lineáris rendszerek identifikációjára alkalmas általánosított Koopmans–Levin módszert olyan rendszerek esetére, amelyek a bemeneti és a kimeneti adatok tekintetében polinomiális függvényekkel modellezhetők. Ez az jelenti, hogy egy

$$f\left(\bar{u}_{k-1}, \bar{u}_{k-1}^2, \bar{y}_k, \bar{y}_{k-1}, \bar{y}_{k-1}^2, \dots\right)$$

függvényhez hasonló függvény veszi át $G(q)$ helyét a 3. ábrán.

3. tézis: Iteratív módszer dinamikus polinomiális rendszerek paraméterbecslésére

Új algoritmust készítettem polinomiális dinamikus rendszerek paraméterbecslésére, amelyet polinomiális általánosított Koopmans–Levin módszernek (a név angol rövidítéséből PGKL) neveztem el. Az algoritmus egyesíti a statikus polinomiális rendszerekre alkalmazható nemlineáris Koopmans módszert és a lineáris dinamikus rendszerekre alkalmazható általánosított Koopmans–Levin módszert. Az algoritmust iteratív eljárásként fogalmaztam meg. Megmutattam, az általánosított Koopmans–Levin módszerhez kötődő általánosított sajátérték probléma hogyan terjeszthető ki polinomiális sajátérték problémává, ha a mérési hibák Gauss zajként modellezhetők. A polinomiális sajátérték probléma egy szimmetrikus linearizációját alkalmaztam, hogy megőrizzem az eredeti feladat szimmetriáját, ezzel fenntartva a numerikus robusztusságot. A PGKL módszer ismert paraméternek feltételezi a zaj bemenet és kimenet közötti

relatív eloszlását. Megmutattam, hogyan alkalmazható egy zajkovariancia-illesztési megközelítés a relatív eloszlás becslésére, ha ez a paraméter nem ismert.

Legyen $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy linearizációs függvény, amelyet $\bar{\mathbf{x}}_{m,k}$ (a k diszkrét időpillanathoz tartozó) adatsorozat-ablak azonos időeltolású elemeire alkalmazunk, ezzel az ablakot $(m+1) \cdot d$ dimenzióból $(m+1) \cdot n$ dimenzióba képezzük le. Legyen

$$\mathbf{G}_q^{\theta_p} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_m & p_{m-1} & p_{m-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_m & p_{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_m & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_m & p_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_m \end{bmatrix}_{q,q-m}$$

ahol minden p_\bullet egy azonos polinomiális taghoz, de különböző időeltoláshoz tartozó paramétert jelöl, csökkenő idősorrendben, úgy, hogy a modellparaméterekre

$$\mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_q^{\theta_1} \\ \mathbf{G}_q^{\theta_2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

adódik. Legyen

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_k) = \bar{\mathbf{z}} = [\bar{z}_{0,k} \quad \bar{z}_{1,k} \quad \dots \quad \bar{z}_{m,k}]$$

ahol $\bar{z}_{r,k} = z_{r,k} - \bar{z}_{r,k}$ és amelyben $\bar{z}_{r,k}$ a leképezett komponens eredeti értéke. Legyen

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\bar{\mathbf{z}}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{z}}_j \right) \left(\bar{\mathbf{z}}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{z}}_j \right)^\top.$$

A linearizált zajkovariancia mátrix (és N adatpontból való véges közelítése) ekkor $\mathbf{C}_q = \mu \mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_q$ ahol μ jelöli a zaj nagyságát. Ekkor az általánosított Koopmans–Levin módszer polinomiális kiterjesztésének célfüggvénye, Gauss zajt feltételezve

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta}, \mu} \frac{1}{2} \text{trace} \left\{ \left(\mathbf{G}_q^\top \mathbf{C}_q(\mu) \mathbf{G}_q \right)^{-1} \left(\mathbf{G}_q^\top \mathbf{D}_q \mathbf{G}_q \right) \right\}$$

alakban írható.

A célfüggvény egy egyszerű iteratív sémával közelíthető, amely jó konvergenciatulajdonságokat mutat. Legyen

$$\boldsymbol{\theta}_{(k+1)}, \mu_{(k+1)} = \underset{\boldsymbol{\theta}, \mu}{\operatorname{argmin}} \frac{\operatorname{trace}\left(\mathbf{G}_{q,(k)}^\top \mathbf{C}_{q,(k)} \mathbf{G}_{q,(k)}\right)^{-1} \left(\mathbf{G}_q^\top \mathbf{D}_q \mathbf{G}_q\right)}{\operatorname{trace}\left(\mathbf{G}_{q,(k)}^\top \mathbf{C}_{q,(k)} \mathbf{G}_{q,(k)}\right)^{-1} \left(\mathbf{G}_q^\top \mathbf{C}_q \mathbf{G}_q\right)}$$

ahol $\mathbf{G}_q = \mathbf{G}_q(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{G}_{q,(k)} = \mathbf{G}_q(\boldsymbol{\theta}_{(k)})$, $\mathbf{C}_q = \mathbf{C}_q(\mu)$ és $\mathbf{C}_{q,(k)} = \mathbf{C}_q(\mu_{(k)})$. Ezzel a módszerrel meghatározhatjuk $\boldsymbol{\theta}_{(k+1)}$ és $\mu_{(k+1)}$ következő értékét, ha ismerjük $\boldsymbol{\theta}_{(k)}$ és $\mu_{(k)}$ jelenlegi értékét. Az átalakítások után adódó

$$\underset{\boldsymbol{\theta}, \mu}{\operatorname{argmin}} \frac{\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{T}^\top \left(\left(\mathbf{G}_{q,(k)}^\top \mathbf{C}_{q,(k)} \mathbf{G}_{q,(k)} \right)^{-1} \otimes \mathbf{D}_q \right) \mathbf{T} \boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{T}^\top \left(\left(\mathbf{G}_{q,(k)}^\top \mathbf{C}_{q,(k)} \mathbf{G}_{q,(k)} \right)^{-1} \otimes \mathbf{C}_q(\mu) \right) \mathbf{T} \boldsymbol{\theta}}$$

séma, ahol \mathbf{T} egy nullákból és egyesekből álló ritka mátrix, úgy megválasztva, hogy $\operatorname{vec}(\mathbf{G}_q) = \mathbf{T} \boldsymbol{\theta}$ legyen, egy

$$\boldsymbol{\Psi}(\mu) \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{Q} - \mathbf{R}(\mu)) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

polinomiális sajátérték feladatok (PEP) sorozatára vezet, ahol a mátrixegythatók

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(\mu) &= \mathbf{T}^\top \left(\mathbf{Q} - \mu \mathbf{R}_1 - \mu^2 \mathbf{R}_2 - \dots - \mu^p \mathbf{R}_p \right) \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} &= \left(\mathbf{G}_{q,(k)}^\top \mathbf{C}_{q,(k)} \mathbf{G}_{q,(k)} \right)^{-1} \otimes \mathbf{D}_q \\ \mathbf{R}_j &= \left(\mathbf{G}_{q,(k)}^\top \mathbf{C}_{q,(k)} \mathbf{G}_{q,(k)} \right)^{-1} \otimes \mathbf{C}_q^{(j)}. \end{aligned}$$

Egy módja a PEP megoldásának, ha linearizációt alkalmazunk, és a mátrixegythatók méretének növekedése árán szüntetjük meg a μ változótól való polinomiális függést. Az olyan átalakítások, amelyek megőrzik a szimmetriát, numerikus szempontból különösen kedvezőek lehetnek. Egy ilyen szimmetriatartó linearizáció [AV04, AV06]

$$\Xi(\mu) = \Xi_1 - \mu \Xi_2$$

amely páros p esetén

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \operatorname{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R}_{p-1} \end{bmatrix} \right\} \\ \Xi_2 &= \operatorname{diag} \left\{ \mathbf{R}_0^{-1}, \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_2 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{p-2} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, -\mathbf{R}_p \right\} \end{aligned}$$

páratlan p esetén

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \operatorname{diag} \left\{ \mathbf{R}_0, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R}_4 \end{bmatrix}, \dots \right\} \\ \Xi_2 &= \operatorname{diag} \left\{ \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_3 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \dots, -\mathbf{R}_p \right\} \end{aligned}$$

alakban írható, ahol a diag operátor az argumentumait diagonális blokkmátrixba rendezi. Az így előálló feladat általánosított sajátérték feladatként oldható meg, amely az eredeti PEP feladat lineáris megfelelője.

Egy polinomiális dinamikus errors-in-variables rendszer $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ és $\hat{\mu}$ becült paramétereinek és a bemenet és kimenet terhelő zaj φ relatív eloszlásának ismeretében egy mértéket vezethetünk be, amely az adatmintában lévő zajt veti össze az általunk használt $\mathbf{C}_q = \mu \mathbf{C}(\varphi) \otimes \mathbf{I}_q$ zajmodellel, adott φ feltételezése mellett. Legyen $d_F(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ az $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ különbséghez tartozó Frobenius norma, azaz

$$d_F(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$$

és $d_{IS}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ az \mathbf{A} és \mathbf{B} közötti Itakura–Saito divergencia, azaz

$$d_{IS}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) - \log \det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}).$$

Ekkor a

$$d(\mathbf{G}_q^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{D}_q\mathbf{G}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{G}_q^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{C}_q(\hat{\mu})\mathbf{G}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

mátrixdivergencia azt méri, milyen közel van a zajmodellünk a mért adatokban lévő zajhoz. Egy φ paraméter feletti kovarianciaillesztéses módszer becslést adhat a zaj bemenet és kimenet közötti relatív eloszlására:

$$\varphi = \arg \min_{\varphi} d(\mathbf{G}_q^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{D}_q\mathbf{G}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{G}_q^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{C}_q(\hat{\mu})\mathbf{G}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

ahol a $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ és $\hat{\mu} = \hat{\mu}(\varphi)$ becsléseket adott φ értékre a PGKL módszer segítségével számítottuk.

4. Alkalmazások

Az errors-in-variables megközelítés számos olyan területen merül fel, ahol a cél zajos pontfelhőből modellt alkotni. A számítógépes látás és a mintafelismerés egy fontos feladata például parametrikus görbék és felületek illesztése. A bemutatott korlátozások nélkül és korlátozások mellett történő illesztési módszerek közvetlenül alkalmazhatók kvadratikus görbék és felületek mérsékelt számítási kapacitás melletti becslésére. A javasolt módszerekkel nyert becslések közel vannak a maximum likelihood jellegű módszerek eredményéhez, azonban míg a maximum likelihood becslések iterációkat igényelnek, és minden iteráció egy nemlineáris görbére vagy felületre való vetítéssel jár, amelyek költséges műveletek, a disszertációban bemutatott algoritmusok egyszerűen megvalósíthatóak, amit az értekezéshez kapcsolódó MatLab forráskódok is mutatnak.

Egy lépéssel tovább haladva, a számítógépes látással kapcsolatos feladatok széles skálájának, mint például a mozgásgsegmentálásnak vagy a poligonfelületek lapjai klaszterezésének, része a több altérrel való adatmodellezés. A mozgáskövetésre épülő szegmentálás során különböző mozgó objektumokhoz tartozó jellemzőpontokat klaszterezünk. Az affin kameramodellből eredően egy mozgó merev testhez tartozó jellemzőpontok koordinátavektora egy affin altéren helyezkednek el, és a mozgó objektumok klaszterezése ekvivalens az egyes affin alterek klaszterezésével. Hasonló a helyzet poligonlapok klaszterezése esetén, ahol a Lambert-féle,

ideális diffúz fényviszaverő tulajdonsággal rendelkező felületű tárgyak különböző megvilágítási feltételek melletti képei egy konvex poliéder kúpot alkotnak a képtérben, és ez a kúp jól közelíthető egy alacsony dimenziós lineáris altérrel. A bemutatott struktúraalkotási módszerek, amelyek az adatokat nemlineáris sokaságokkal modellezik, alkalmazhatóak ezekben a kontextusban.

Végül a polinomiális dinamikusszerek azonosítási módszere közvetlenül alkalmazható egybemenetű–egykimenetű rendszerekre, ahol a vizsgált rendszert alacsony fokszámú polinommal közelítjük. Mivel a polinomiális approximáció egy természetes módja a nemlineáris rendszerek kezelésének, a javasolt módszer széles körben alkalmazható.

Hivatkozások

- [AM04] Pankaj K. Agarwal and Nabil H. Mustafa. k-means projective clustering. In *Proc. of ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART Symposium on Principles of Database Systems*, 2004.
- [AV04] Efstathios N. Antoniou and Stavros Vologgiannidis. A new family of companion forms of polynomial matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 11:78–87, 2004.
- [AV06] Efstathios N. Antoniou and Stavros Vologgiannidis. Linearizations of polynomial matrices with symmetries and their applications. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 15:107–114, February 2006.
- [AWZZ06] Stefan Van Aelst, Xiaogang (Steven) Wang, Ruben H. Zamar, and Rong Zhu. Linear grouping using orthogonal regression. *Computational Statistics and Data Analysis*, 50(5):1287–1312, March 2006.
- [BM00] Paul S. Bradley and Olvi L. Mangasarian. k-plane clustering. *Journal of Global Optimization*, 16(1):23–32, 2000.
- [C⁺05] Wojciech Chojnacki et al. FNS, CFNS and HEIV: A unifying approach. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23:175–183, 2005.
- [CAL09] Guangliang Chen, Stefan Atev, and Gilad Lerman. Kernel spectral curvature clustering (KSCC). In *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2009)*, pages 765–772, Kyoto, Japan, September 2009.
- [CJ93] Pramod N. Chivate and Andrei G. Jablow. Solid-model generation from measured point data. *Computer-Aided Design*, 25(9):587–600, 1993.
- [CM11] Nikolai Chernov and Hui Ma. Least squares fitting of quadratic curves and surfaces. *Computer Vision*, pages 285–302, 2011.
- [FPF99] Andrew W. Fitzgibbon, Maurizio Pilu, and Robert B. Fisher. Direct least squares fitting of ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21:476–480, 1999.

- [HF98] Radim Halíř and Jan Flusser. Numerically stable direct least squares fitting of ellipses. In Vaclav Skala, editor, *Proceedings of the International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Interactive Digital Media*, pages 125–132, 1998.
- [HOZM08] Matthew Harker, Paul O’Leary, and Paul Zsombor-Murray. Direct type-specific conic fitting and eigenvalue bias correction. *Image and Vision Computing*, 26:372–381, 2008.
- [KR11] Kenichi Kanatani and Prasanna Rangarajan. Hyper least squares fitting of circles and ellipses. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55:2197–2208, 2011.
- [LG04] Qingde Li and John G. Griffiths. Least squares ellipsoid specific fitting. In *Proceedings of the Geometric Modeling and Processing*, 2004.
- [MM00] Bogdan Matei and Peter Meer. A general method for errors-in-variables problems in computer vision. In *Proc. of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 18–25. IEEE Computer Society Press, 2000.
- [MP07] Marina Meilă and William Pentney. Clustering by weighted cuts in directed graphs. In *Proc. of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining*, 2007.
- [OZM04] Paul O’Leary and Paul J. Zsombor-Murray. Direct and specific least-square fitting of hyperbolæ and ellipses. *Journal of Electronic Imaging*, 13(3):492–503, 2004.
- [SP05] Richard Souvenir and Robert Pless. Manifold clustering. In *Proceedings of the 10th International Conference on Computer Vision*, pages 648–653, 2005.
- [TM01] Françoise Tisseur and Karl Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review*, 43(2):235–286, 2001.
- [Tse00] Paul Tseng. Nearest q -flat to m points. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 105(1):249–252, 2000.
- [Vaj05] István Vajk. Identification methods in a unified framework. *Automatica*, 41(8):1385–1393, 2005.
- [VH03] István Vajk and Jenő Hetthéssy. Identification of nonlinear errors-in-variables models. *Automatica*, 39:2099–2107, 2003.
- [ZSWL10] Teng Zhang, Arthur Szlam, Yi Grace Wang, and Gilad M. Lerman. Hybrid linear modeling via local best-fit flats. In *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1927–1934, 2010.

A szerző folyóiratcikkei

- [1] Levente Hunyadi and István Vajk. Modeling by fitting a union of polynomial functions to data. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 27(2), 2013. IF (2011): 0.624.
- [2] Levente Hunyadi and István Vajk. Reconstructing a model of implicit shapes from an unorganized point set. *Scientific Bulletin of „Politehnica” University of Timișoara, Transactions on Automatic Control and Computer Science (Buletinul Științific al Universității „Politehnica” din Timișoara, Romania, Seria Automatica și Calculatoare)*, 56(70):57–64, 2011.
- [3] Levente Hunyadi and István Vajk. Identifying dynamic systems with polynomial nonlinearities in the errors-in-variables context. *WSEAS Transactions on Systems*, 8(7):793–802, July 2009.
- [4] Levente Hunyadi and István Vajk. An errors-in-variables parameter estimation method with observation separation. *Scientific Bulletin of „Politehnica” University of Timișoara, Transactions on Automatic Control and Computer Science*, 54(68)(2):93–100, 2009.
- [5] Levente Hunyadi and István Vajk. An identification approach to dynamic errors-in-variables systems with a preliminary clustering of observations. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering*, 52(3-4):127–135, 2008.

A szerző konferenciakiadványban megjelent közleményei

- [6] Levente Hunyadi and István Vajk. Fitting a model to noisy data using low-order implicit curves and surfaces. In *Proc. of 2nd Eastern European Regional Conference on the Engineering of Computer Based Systems*, pages 106–114, Bratislava, Slovakia, September 2011.
- [7] Levente Hunyadi and István Vajk. Identifying unstructured systems in the errors-in-variables context. In *Proc. of 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, pages 13104–13109, Milano, Italy, August–September 2011. Paper ThC23.2.
- [8] Levente Hunyadi. Fitting implicitly defined shapes to scattered data points with parameters subject to constraints. In István Vajk and Renáta Iváncsy, editors, *Proc. of Automation and Applied Computer Science Workshop*, pages 197–208, Budapest, Hungary, June 2011.
- [9] Levente Hunyadi and István Vajk. Identification of linearizable dynamic systems in the errors-in-variables framework. In *Proc. of 1st International Scientific Workshop on Distributed Control Systems*, pages 37–42, Miskolc–Lillafüred, October 2011.
- [10] Levente Hunyadi. Fitting implicit curves to scattered data points. In István Vajk and Renáta Iváncsy, editors, *Proc. of Automation and Applied Computer Science Workshop (AACCS)*, pages 37–48, Budapest, Hungary, June 2010.

- [11] Levente Hunyadi and István Vajk. Implicit model fitting to an unorganized set of points. In *Proc. of IEEE International Joint Conferences on Computational Cybernetics and Technical Informatics (ICCC-CONTI 2010)*, pages 487–491, Timișoara (Temesvár), Romania, May 2010. paper 85.
- [12] Levente Hunyadi and István Vajk. Fitting an implicit model in the errors-in-variables context. In Attila K. Varga and József Vásárhelyi, editors, *Proc. of 11th International Carpathian Control Conference*, pages 359–362, Eger, Hungary, May 2010.
- [13] Levente Hunyadi and István Vajk. Model reconstruction from a point cloud in the errors-in-variables context. In Bikfalvi Péter, editor, *Proc. of microCAD International Scientific Conference*, pages 65–70, Miskolc, Hungary, March 2010.
- [14] Levente Hunyadi. Implicit function reconstruction in the errors-in-variables context. In Anikó Szakál, editor, *Proc. of 10th International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence and Informatics*, pages 601–612, Budapest, Hungary, November 2009.
- [15] Levente Hunyadi and István Vajk. An approach to identifying linearizable dynamic errors-in-variables systems. In *Proc. of 10th International PhD Workshop on Systems and Control*, Hluboka nad Vltavou, Czech Republic, September 2009. paper 102.
- [16] Levente Hunyadi and István Vajk. Separation methods for dynamic errors-in-variables system identification. In *Proc. of European Control Conference (ECC)*, pages 460–465, Budapest, Hungary, August 2009.
- [17] Levente Hunyadi. A cross-validating method for simultaneous model and noise parameter estimation in errors-in-variables systems. In István Vajk, editor, *Proc. of Automation and Applied Computer Science Workshop*, pages 39–52, Budapest, Hungary, June 2009.
- [18] Levente Hunyadi. A parameter estimation approach to dynamic errors-in-variables systems with polynomial nonlinearities. In István Vajk, editor, *Proc. of Automation and Applied Computer Science Workshop*, pages 25–38, Budapest, Hungary, June 2009.
- [19] Levente Hunyadi and István Vajk. Estimating parameters of dynamic errors-in-variables systems with polynomial nonlinearities. In Metin Demiralp, N. A. Baykara, and N. E. Mastorakis, editors, *Signal Processing Systems, Proc. of 8th WSEAS International Conference on Signal Processing (SIP)*, pages 73–78, Istanbul, Turkey, June 2009.
- [20] Levente Hunyadi and István Vajk. Polinomiális jellegű nemlinearitásokból álló dinamikus rendszer paraméterbecslése. In László Lehoczky, editor, *Proc. of microCAD International Scientific Conference*, pages 55–60, Miskolc, Hungary, March 2009.
- [21] Levente Hunyadi and István Vajk. Identifying dynamic systems with a nonlinear extension of the generalized Koopmans-Levin method. In László Lehoczky, editor, *Proc. of microCAD International Scientific Conference*, pages 49–54, Miskolc, Hungary, March 2009.

- [22] Levente Hunyadi. Separation techniques for errors-in-variables parameter estimation. In Anikó Szakál, editor, *Proc. of 9th International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence and Informatics*, pages 467–478, Budapest, Hungary, November 2008.
- [23] Levente Hunyadi. An identification approach to dynamic errors-in-variables systems with a preliminary clustering of observations. In *Proc. of 6th Conference of PhD Students in Computer Science (CSCS)*, Szeged, Hungary, July 2008. Awarded „Best talk” in session Operation Research.
- [24] Levente Hunyadi. Methods for simultaneous estimation of process and noise parameters in errors-in-variables systems. In István Vajk, editor, *Proc. of Automation and Applied Computer Science Workshop*, pages 115–126, Budapest, Hungary, June 2008.
- [25] Levente Hunyadi. A framework for comparing errors-in-variables estimation algorithms. In István Vajk, editor, *Proc. of Automation and Applied Computer Science Workshop*, pages 127–138, Budapest, Hungary, June 2008.
- [26] Levente Hunyadi and István Vajk. Identification of errors-in-variables systems using data clustering. In Gregor Rozinaj, Jozef Čepko, Peter Trúchly, Ján Vrabec, and Juraj Vojtko, editors, *Proc. of the 15th International Conference on Systems, Signals and Image Processing (IWSSIP)*, pages 197–200, Bratislava, Slovakia, June 2008.
- [27] Levente Hunyadi and István Vajk. Parameter estimation for errors-in-variables systems using partitioned input data. In Octavian Prostean, Gheorghe-Daniel Andreescu, and Dan Pescaru, editors, *Proc. of the 8th International Conference on Technical Informatics (CONTI)*, pages 47–52, Timișoara (Temesvár), Romania, June 2008.
- [28] Levente Hunyadi. Identification methods for dynamic errors-in-variables systems. In László Lehoczky, editor, *Proc. of microCAD International Scientific Conference*, pages 57–62, Miskolc, Hungary, March 2008.