

Válaszok az opponensi véleményekben szereplő kérdésekre és észrevételekre

Hunyadi Levente

2014. január 4.

Válaszok Dr. Molnár Sándor észrevételeire

Az alkalmazások során sokkal több konkrét eredményt kellene megemlíteni, amelyekkel összehasonlítva a disszertációban elért eredményeket, kimutatható lenne valamilyen gazdaságosság, optimalitás a disszertációban felsorolt eljárások javára.

Az 1. tézis kapcsán több más algoritmussal, illetve a disszertáció 2.1.7 szakaszában röviden bemutatott Kanatani–Cramer–Rao (KCR) alsó határértékkel [6], mint elvi határral való összevetés szolgáltatott összehasonlítási alapot. Az eredmények egy megjelenés alatt lévő folyóiratcikkekben [5] is olvashatók.

Az 1. ábra az 1. tézisben javasolt módszer becslési torzítását és pontosságát mutatja más módszerekkel összehasonlítva. Definiáljuk az egységre normált \mathbf{g} paramétervektor és az egységre normált becslült $\hat{\mathbf{g}}$ vektor közötti $\Delta\mathbf{g}$ eltérést [6] alapján úgy, hogy

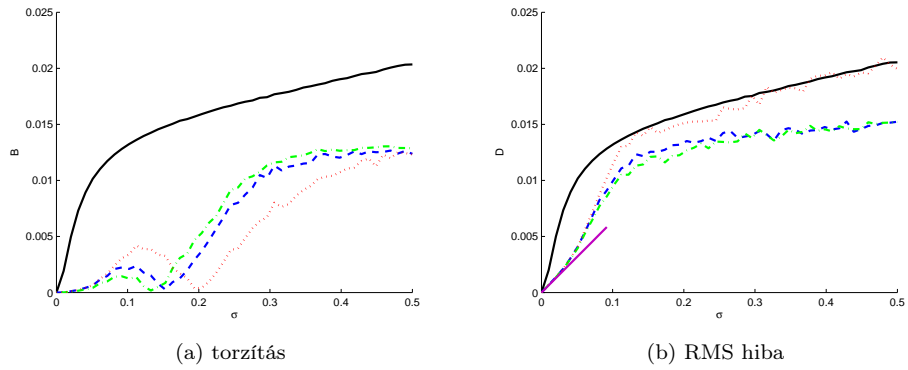
$$\Delta\mathbf{g} = \mathbf{P}_{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{g}}$$

ahol $\mathbf{P}_{\mathbf{g}} = \mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{g}^{\top}$ az ortogonális projekciós mátrix \mathbf{g} mentén. A torzítást és az RMS hibát

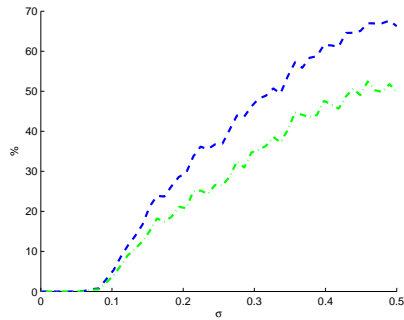
$$B = \left\| \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \Delta\mathbf{g}_{(k)} \right\|$$
$$D = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|\Delta\mathbf{g}_{(k)}\|^2}$$

szerint közelítjük, ahol $\Delta\mathbf{g}_{(k)}$ az eltérés a k . iterációban $M = 2000$ iteráció közül. Az 1a és 1b ábrák B és D értékét, illetve a KCR határértéket mutatják a függőleges tengelyen, míg a vízszintes tengelyen a pontokra rakódó Gauss zaj σ szórása szerepel, ahol σ a zajmentes $\sigma = 0$ esettől a rendkívül zajos esetnek megfelelő $\sigma = 0.5$ értékig terjed. (A KCR határérték csak kis zaj esetén ad jó közelítést, hasonló módon a statisztikában használt $N \rightarrow \infty$ közelítéshez, amely csak nagy mintaszám esetén ad jó közelítést, ezért a KCR határértéket az 1b ábra nagyobb zaj esetén már nem ábrázolja.)

Az ábrákon látható, hogy a közvetlen ellipszisillesztés kivételével mindegyik illesztési módszer, beleértve a javasolt módszert, (szinte) tökéletes illesztést ad zajmentes esetre vagy kis zaj esetén, mindegyik módszer torzítása kicsi, a módszerek által adott RMS hiba szinte megegyezik a KCR határértékkel. Amíg



1. ábra. Különböféle kvadratikus görbeillesztési módszerek becslési torzítása és RMS hibája: közvetlen ellipszisillesztés (folytonos vonal), Taubin illesztés (szaggatott vonal), hiperpontos illesztés (szaggatott pontozott vonal), a javasolt módszer (pontozott vonal), KCR alsó határérték (egyenes folytonos vonal).



2. ábra. A nem ellipszis megoldások aránya a teljes becslési halmazhoz képest: Taubin illesztés (szaggatott vonal), hiperpontos illesztés (szaggatott pontozott vonal).

a közvetlen ellipszisillesztésnek nagyobb a torzítása, ahogyan azt az 1a ábra mutatja, addig más módszerek, például a Taubin illesztés (szaggatott vonal), a hiperpontos illesztés (szaggatott pontozott vonal) vagy a javasolt módszer (pontozott vonal) hasonló, kisebb torzítást adnak. Az RMS hibát illetően, amit az 1b ábra mutat, a közvetlen ellipszisillesztést leszámítva mindegyik módszer ugyanúgy viselkedik kis zajszint esetén, szorosan megközelítve a KCR határértéket (egyenes folytonos vonal). $\sigma = 0.1$ értéktől kezdve a javasolt módszer RMS hibája a közvetlen ellipszisillesztés hibájához (görbe folytonos vonal) tart, míg a Taubin illesztés (szaggatott vonal) és a hiperpontos illesztés (szaggatott pontozott vonal), úgy tűnik, kisebb hibát adnak. Ugyanakkor a Taubin illesztés és a hiperpontos illesztés nem ellipszis-specifikusak, és ellipszis helyett hiperbolát illeszthetnek nagyobb zajszinteknél, ahol az illesztett görbék közel 50%-a nem ellipszis; ezt az érzékenységet mutatja a 2. ábra, amikor az adatokat egy korlátos ív mentén vettük. Ezeknek a nem ellipszist adó megoldásoknak az eltávolításával kaptunk látszólag jobb eredményt az 1a és 1b ábrán. A javasolt módszernek ugyanakkor nincs ilyen fajta érzékenysége vagy konvergenciaproblémája, mert az ellipszisillesztést a korlátozások garantálják. Összefoglalva, a javasolt algoritmus (más hatékony algoritmusokhoz hasonlóan) megközelíti a KCR alsó határértéket, viszont a korlátozások révén jelentősen kisebb az érzékenysége.

Az ellipszisillesztéshez hasonló eredményt hoz a közvetlen ellipszoidillesztés és a javasolt módszer összevetése. A disszertáció 2.6 ábrája egy szemléltető példán mutatja be a különbséget, a hivatkozott [5] folyóiratcikk pedig további példák és szimulációs eredmények segítségével támasztja alá a javasolt módszer előnyös tulajdonságait a közvetlen ellipszoidillesztéssel összehasonlítva.

A 2. tézis kapcsán a szerző helyzetét nehezítette, hogy az irodalomban bemutatott más módszerek egyrészt gyökeresen eltérő megközelítést alkalmaznak, másrészt meglehetősen érzékenyek a pontokat terhelő zaj mértékére. Már közepes nagyságú zaj is könnyen megteveszti az irodalomban olvasható [2, 10, 13] algoritmusokat, ahogyan azt a disszertáció 3.3 ábrája egy szemléltető példán bemutatja, míg a javasolt módszer nagy zaj esetén is helyesen működik, éppen az alapjául szolgáló (1. tézisben ismertetett) illesztési eljárás révén. Ugyanakkor más csoportosítási algoritmusok közelségi információt vagy olyan transzformációt használnak, amellyel a csoportosítás kimenete nem felel meg semmilyen explicit modellnek (pl. kvadratikus görbék vagy felületek), így olyan csoportosításra is képesek, amire a javasolt módszer nem (pl. spirálok klaszterezése). Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy a szerző nem talált olyan jól megfogható mérőszámot, amellyel a javasolt módszer eredménye számszerűen könnyen összevethető lenne más módszerek eredményével. Másrészt azonban azokra a példákra (pl. egymást metsző körök, egymást metsző kvadratikus görbék, egymást metsző ellipszoidok), amelyek más cikkekben szerepelnek, a javasolt algoritmus is megfelelő kimenetet ad [4], ráadásul a tapasztalatok szerint rövidebb futási idővel. (A futási idő összevetésénél más cikkekben szereplő algoritmusok MATLAB kódjának [9, 1] és a javasolt algoritmus MATLAB kódjának futási idejét vettem alapul, a megvalósítások minősége közötti különbségek, pl. vektorizáció kiaknázásának mértéke, azonban jelentős futási időbeli eltéréseket magyarázhatnak.)

A 3. tézis eredményességére a disszertáció 4.1 táblázata ad példát. A PBCLS módszert bemutató [7] cikkben szereplő dinamikus rendszert azért választottam a 4.1 táblázatot eredményező szimuláció tárgyául, hogy a PBCLS módszer és a disszertációban javasolt módszer pontossága könnyen összevethető legyen. A táblázatból jól látható, hogy a javasolt módszer sokkal pontosabban (kisebb szó-

rással) becsüli meg a rendszer paramétereit, mint a PBCLS módszer, a négyzetes tagok (pl. u_{k-1}^2) esetén a különbség szembetűnő, mert a PBCLS módszer gyakorlatilag használhatatlan eredményt ad (pl. -0.286 ± 0.126), míg a javasolt módszer viszonylag jól közelít (pl. -0.3056 ± 0.0444). A javasolt nemlineáris módszer pontosságának forrása nagyrészt az alapjául szolgáló GKL módszer [12], lineáris vonatkozásban hasonló eredmény adódik a BCLS és a GKL módszerek összevetéséből.

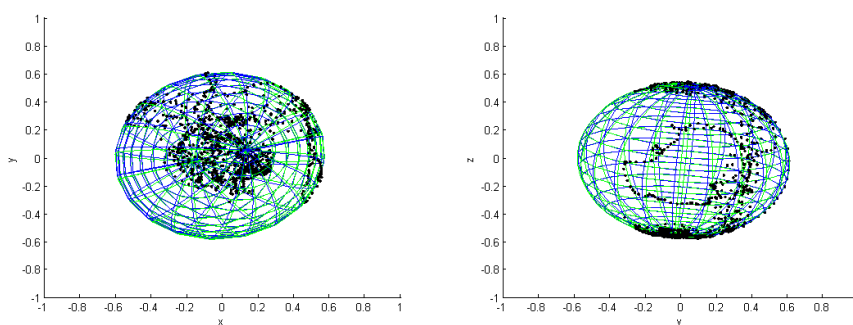
Válaszok Dr. Gáspár Péter kérdéseire

Véleményem szerint kevés szó esik [...] a szimulációs környezetről. [...] Milyen standard eszközöket alkalmazott, milyen függvényeket kellett esetleg kidolgoznia, és milyen paraméterezéssel történt a szimuláció?

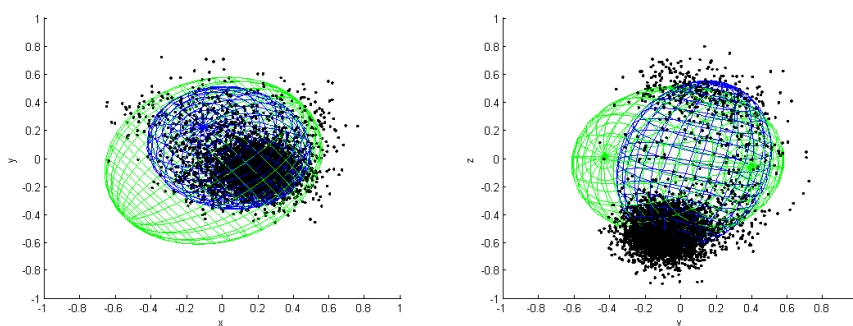
A disszertációban bemutatott algoritmusokat MATLAB környezetben implementáltam, ám a fejlesztést a nyílt forráskódú SciPy vagy más prototípus-fejlesztésre alkalmas olyan környezet is elősegítette volna, amelynek integráns részei a lineáris algebra szokásos műveletei (mátrixműveletek, sajátérték-feladat), illetve az interaktív vizualizáció. A MATLAB nyújtotta beépített függvények mellett a disszertációhoz kapcsolódó fejlesztési munka keretében többek között megvalósítottam polinomiális sajátérték feladatot megoldó függvényt (ami az NKL és NGKL algoritmusok egyik lépése), polinomok szimbolikus kezelését támogató függvényeket (a zaj kompenzálásához használt mátrix számításához), kvadratikus görbékkel és felületekkel kapcsolatos transzformációkat (többek között a disszertáció függelékében tárgyalt vetítéseket), görbe- és felületillesztési algoritmusokat (a javasolt módszerekkel való összehasonlításhoz), a spektrális klaszterezés egyes algoritmusait (amiket a csoportosítási algoritmus részeként használunk fel), illetve a 3D interaktív vizualizációhoz kapcsolódó műveleteket. Az elkészített függvények nagy része önállóan is elérhető nyílt forráskódú programcsomagok részeként (pl. MathWorks File Exchange). A disszertációban, illetve az ahhoz kapcsolódó publikációkban olvasható példák jelentős része Monte-Carlo szimuláció: egy adott modellhez minden iterációban Gauss (vagy más jellegű) zajt adva vizsgáltam az algoritmusok viselkedését, tipikusan $N = 1000$ és $N = 10000$ iterációszámmal; illetve adott tulajdonságoknak megfelelő modelleket generáltam (pl. adott sugárányokkal rendelkező ellipszoid), majd ezekhez adtam Gauss zajt. A konkrét szimulációkhoz tartozó paramétereiket a disszertáció, illetve az ahhoz kapcsolódó [5, 4] folyóiratcikkek tartalmazzák.

Adjon útmutatást egy tetszőleges gyakorlati probléma kapcsán arra vonatkozólag, hogy milyen szempontok, tényezők, körülmények alapján kell az algoritmusok közül választani, azaz – konkrétan – milyen szempontok szerint válasszunk a 2.1 és 2.2 alfejezetben [bemutatott] algoritmusok közül?

Tekintsünk egy magnetométer kalibrálási feladatot. Geomágneses teret mérő szenzorok ma már számos hordozható készülékben megtalálhatóak, és lehetővé teszik az eszköz orientációjának meghatározását. A kalibráció során az eszközt különböző irányokba forgatjuk, az eszközbe épített szenzor adatai pedig egy (eszköztől függően) két-dimenziós vagy háromdimenziós pontfelhőt alkotnak,



(a) kis zaj mellett



(b) jelentős zaj mellett

3. ábra. Egy geomágnesesmező-szenzor kalibrációjához használt adatok kis és jelentős zaj mellett. A legkisebb négyzetes módszerre alapuló közvetlen ellipszoidillesztést kék szín, a disszertációban javasolt ellipszoidillesztési módszert zöld szín mutatja.

amelyek ideális esetben egy origó középpontú kör vagy gömb görbájén vagy felületén helyezkednek el. A valós adatok azonban az ideálistól gyakran jelentősen eltérnek. Olyan anyagok, amelyek állandó mértékű mágneses mezőt hoznak létre, egy konstans nagyságú vektorral tolják el a méréseket (hard iron distortion). Más anyagok, pl. vas vagy nikkal, nem feltétlenül hoznak létre saját mágneses mezőt, de úgy befolyásolják a mágneses mezőt, hogy az függ a szenzor orientációjától, ez pedig a kör vagy gömb mentén található pontokat egy ellipszis vagy ellipszoid mentén található pontfelhővé torzítja (soft iron distortion). A kalibráció célja az, hogy meghatározzuk az ellipszis vagy ellipszoid középpontjának eltolását, tengelyeinek hosszát, és az x , y és z tengelyekhez viszonyított elforgatását. A kalibráció révén adódó mátrix inverzével szorozva későbbi mérések alapján a pontos orientáció gyorsan meghatározható.

Ha a mért adatok pontosak, a 2.1 és 2.2 alfejezet algoritmusai közül bármelyik használható, hiszen az algoritmusok szinte azonos eredményt adnak, a legegyszerűbb az iterációmentes legkisebb négyzetes becslést alkalmazni, az algoritmus nemlineáris torzítása a pontos adatok miatt elhanyagolható, ezt mutatja egy háromdimenziós esetre a 3a ábra. Ha a szenzor pontossága kisebb (pl. olcsóbb alkatrész, elmozduló eszköz) és a kalibrációs adatok nem fedik le az

ellipszoid felületét (pl. a kalibrációt rövid idő alatt, kevés mintavételezett pont után szeretnék elvégezni), a hagyományos legkisebb négyzetes becslés pontatlan eredményt ad, ezt mutatja a 3b ábra, amely a közvetlen ellipszoidillesztést [8] (ami egy legkisebb négyzetes becslésre alapuló módszer) és a disszertációban javasolt korlátozások melletti becslést hasonlítja össze, utóbbi a nagy zaj ellenére is viszonylag pontos becslést ad. Szintén alkalmazhatnánk a geometriát jobban kiaknázó Taubin módszert [11] is, de ez általános kvadratikus felületet illeszt, és nem minden esetben ad ellipszoidot, ami meghiúsíthatja a kalibrációt, a 3b ábra pontfelhője esetén például ez történt. A kalibrációs feladatra kevésbé alkalmazható a maximum likelihood módszer; bár pontos, a tárgyalt módszerek közül a leginkább számításigényes, ami egy korlátozottabb számítási kapacitással rendelkező (esetleg beágyazott) eszközben (pl. mobiltelefon) komoly tényező, különösen, ha a kalibrációt gyakran el kell végezni (pl. elmozdított eszköz révén változó mágneses környezet). A disszertációban bemutatott módszer nem iteratív (kis számítási igényű) és mindig ellipszoidot illeszt (a kalibráció mindig elvégezhető), ezért jól alkalmazható erre a feladatra. Összefoglalva, az algoritmusok közül három fő szempont alapján választhatunk: (1) pontosság (a zaj mértékének függvényében), (2) számítási igény, (3) a várt típusú görbe/felület illesztésének képessége. Bár a konkrét példa a háromdimenziós esetet mutatta, a kétdimenziós eset megfontolásai hasonlóak.

A kísérletezések során előfordult-e olyan eset, amelyben bizonyos σ értéktől a 3.4 ábra szerinti eredmények eltorzulnak (például változik a detektált klaszterek száma)?

Bár a disszertációban javasolt módszerben a k , azaz a klaszterek száma bemenő paraméter, a k kezdeti pont megválasztása jelentősen befolyásolhatja a végeredményt. A 2.1 tézisben a szerző ennek hatását egy újramintavételezési lépéssel igyekszik kiküszöbölni, hasonlóan más k -közép jellegű algoritmusok eljárásához, így az algoritmus azt a kimenetet tekinti végeredménynek, amelyik a legkisebb összesített hibát adja. A 2.2 tézis algoritmus nem iteratív, újramintavételezésre nincs szükség (vagy lehetőség), viszont a k téves megválasztása könnyen eltorzuló klaszterekhez vezethet. A 2.2 tézis algoritmus a spektrális klaszterezést egy α csillapítási paraméter mellett végzi, ennek megválasztása egyes feladatok esetén lényegesen befolyásolja a végeredményt. Általánosságban elmondható, hogy egy (feladattól függő) σ küszöbérték felett nő annak valószínűsége, hogy hibás (nem az elvárásoknak megfelelő) klaszterezést kapunk, erre a 3.4 ábra alapjául szolgáló kísérletben a legnagyobb zajszint esetén volt példa.

Váználja, hogyan használná a 2.2.4 szakaszban kidolgozott ellipszoid illesztő algoritmusát egy adott gyakorlati probléma [...] jellemző (globális) görbületeinek meghatározására!

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk ismét a 3a és a 3b ábra pontjait felhasználó magnetométer kalibrációs feladatot. Bemeneti adatként rendelkezésünkre állnak a szenzor által mért adatok x , y és z koordinátái, ezek mellett a 2.2.4 szakasz algoritmusának szüksége van az egyes koordinátákra rakódó (egymástól független) zaj σ_x , σ_y és σ_z szórásának arányára. Nincs szükség arra, hogy a szórások konkrét értékét ismerjük, csak ezek egymáshoz viszonyított aránya képezi az algoritmus bemenő paramétereit, a legtöbb alkalmazásban feltételezhetjük, hogy

a relatív szórások egyenlőek (pl. azonosan 1 értékre választhatóak). Az x , y és z , valamint σ_x , σ_y és σ_z értékekből az algoritmus meghatározza az ellipszoid paramétereit, a konkrét példában ezek a kvadratikus görbe

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + fxy + gxz + hyz + px + qy + rz + d = 0$$

implicit alakja mellett

$$\begin{array}{lll} a = & 0.5551 & b = 0.5398 & c = 0.6292 \\ f = & -0.0419 & g = 0.0468 & h = 0.0255 \\ p = & 0.0185 & q = -0.0143 & r = 0.0260 \\ d = & -0.1913 & & \end{array}$$

Mivel a konkrét példában az ellipszoid sem nem hosszúkás, sem nem tömzsi, az algoritmus iterációmentesen fut le, a 2.2.4 szakasz jelölésével $k = 4$ mellett.

Milyen továbblépési lehetőségeket fogalmazna meg akár a saját kutatásaira vonatkozóan, akár az ebben a témában dolgozó, az elért kutatási eredményeket és módszereket felhasználó PhD kutató számára?

A disszertáció egy rövid alfejezetben (6.2 *Future work*) vázol fel nyitott kérdéseket, továbblépési lehetőségeket. Az 1. tézis ellipszisek, parabolák, hiperbolák és ellipszoidok illesztésével foglalkozik, de jövőbeli munka tárgyát képezi a módszer kiterjesztése (a gyakorlatban előforduló) további másodrendű görbék és felületek korlátozások melletti illesztésére (pl. hengerek, kúpfelületek), illetve általánosabb korlátozások megfogalmazására (pl. adott paramétertartományba eső sugár). (A közelítő maximum likelihood becslés [3] kapcsán több cikk foglalkozik általános korlátozásokkal.) A 2. tézis területén a két fő nyitott kérdés a klaszterek számának automatikus megválasztása és az outlier pontok szűrése, amelyre az 1. tézisben bemutatott módszer érzékeny. A klaszterek detektálásával kapcsolatban a szerző már készített egy algoritmust, amely a szükségesnél (akár lényegesen több) kezdeti klaszterrel indul, és egy klaszter-eliminálási szabállyal eldobja vagy más klaszterekkel összeolvastja a feleslegesnek vélt klasztereket, de ez az eredmény még nincs (folyóirat)cikkben publikálható állapotban. Továbbfejlesztési lehetőségként fogalmazható meg az algoritmusok számítási idejének csökkentése: akár a 2. tézis algoritmusainak keretében egy inkrementális technika, akár a 3. tézis nagyméretű mátrixainak kisebb dimenziós közelítése jelentősen csökkentheti az algoritmusok futási idejét, igényelt számítási kapacitását.

Hivatkozások

- [1] Stefan Atev. Matlab source code for kernel spectral curvature clustering. <http://www.math.duke.edu/~glchen/ksc.html>, 2009.
- [2] Guangliang Chen, Stefan Atev, and Gilad Lerman. Kernel spectral curvature clustering (KSCC). In *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2009)*, pages 765–772, Kyoto, Japan, September 2009. doi:10.1109/ICCVW.2009.5457627.

- [3] Wojciech Chojnacki, Michael J. Brooks, Anton van den Hengel, and Darren Gawley. FNS, CFNS and HEIV: A unifying approach. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(2):175–183, September 2005. doi:10.1007/s10851-005-6465-y.
- [4] Levente Hunyadi and István Vajk. Modeling by fitting a union of polynomial functions to data in an errors-in-variables context. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 27(2), March 2013. doi:10.1142/S0218001413500043. Article ID 1350004.
- [5] Levente Hunyadi and István Vajk. Constrained quadratic errors-in-variables fitting. *The Visual Computer Journal*, 2013. doi:10.1007/s00371-013-0885-2. available on-line.
- [6] Kenichi Kanatani and Prasanna Rangarajan. Hyper least squares fitting of circles and ellipses. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(6): 2197–2208, June 2011. doi:10.1016/j.csda.2010.12.012.
- [7] Tomasz Larkowski, Jens G. Linden, and Keith J. Burnham. Identification of dynamic nonlinear polynomial models in the errors-in-variables framework. In *Proc. of 15th IFAC Symposium on System Identification*, pages 1580–1585, Saint-Malo, France, 2009. doi:10.3182/20090706-3-FR-2004.00262.
- [8] Qingde Li and John G. Griffiths. Least squares ellipsoid specific fitting. In *Proc. of Geometric Modeling and Processing*, pages 335–340, 2004. doi:10.1109/GMAP.2004.1290055.
- [9] Richard Souvenir and Robert Pless. Matlab source code for manifold clustering. <http://coitweb.uncc.edu/~souvenir/kmanifolds.htm>, 2005.
- [10] Richard Souvenir and Robert Pless. Manifold clustering. In *Proc. of 10th International Conference on Computer Vision*, pages 648–653, 2005.
- [11] Gabriel Taubin. Estimation of planar curves, surfaces and nonplanar space curves defined by implicit equations, with applications to edge and range image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(11):1115–1138, November 1991. doi:10.1109/34.103273.
- [12] István Vajk. Identification methods in a unified framework. *Automatica*, 41(8):1385–1393, 2005. doi:10.1016/j.automatica.2005.03.012.
- [13] Ureerat Wattanachon and Chidchanok Lursinsap. SPSM: A new hybrid data clustering algorithm for nonlinear data analysis. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 23(8):1701, 2009. doi:10.1142/S0218001409007685.